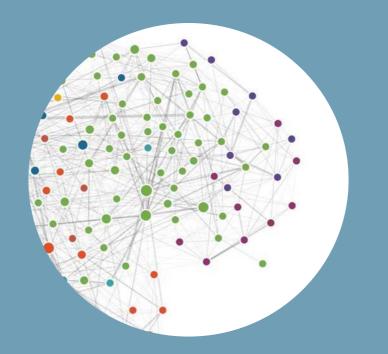
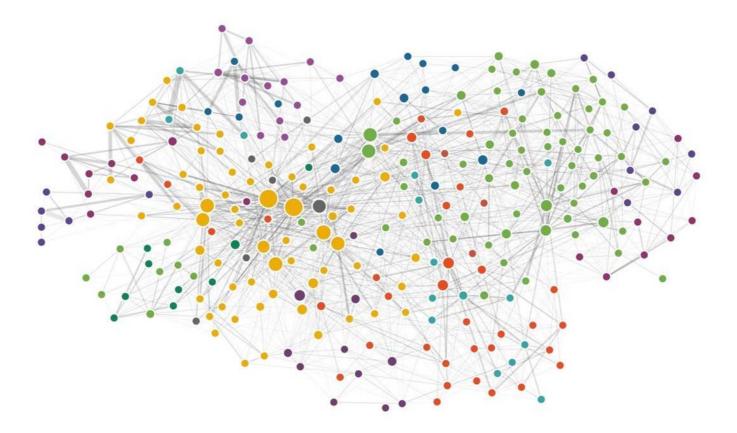
Dimension reduction on heterogeneous networks



Marina Vegué Vincent Thibeault Patrick Desrosiers Antoine Allard

Dynamica Research Group Université Laval, Québec, Canada Why dimension reduction?



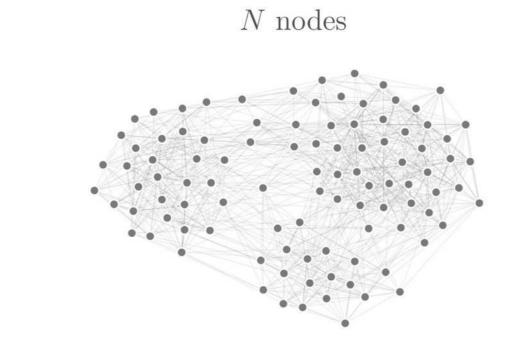
Goal

Find a network of reduced size whose dynamics can be used to infer some basic properties of the original, high dimensional, dynamics.

Use it to study systems whose units exhibit **non-symmetric** and **heterogeneous interactions.**

Previous work

Gao et al., Nature, 2016 Jiang et al., PNAS, 2018 Laurence et al., Phys. Rev. X, 2019 Thibeault et al., iScience, 2020

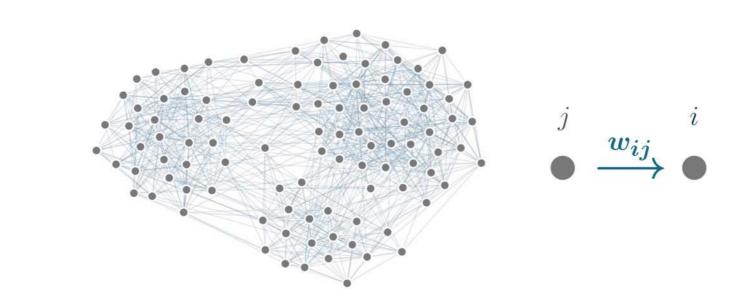


Network

Dynamics

$$\dot{x}_i = f(x_i) + \sum_{j=1}^N w_{ij} g(x_i, x_j)$$

 ${\cal N}$ nodes



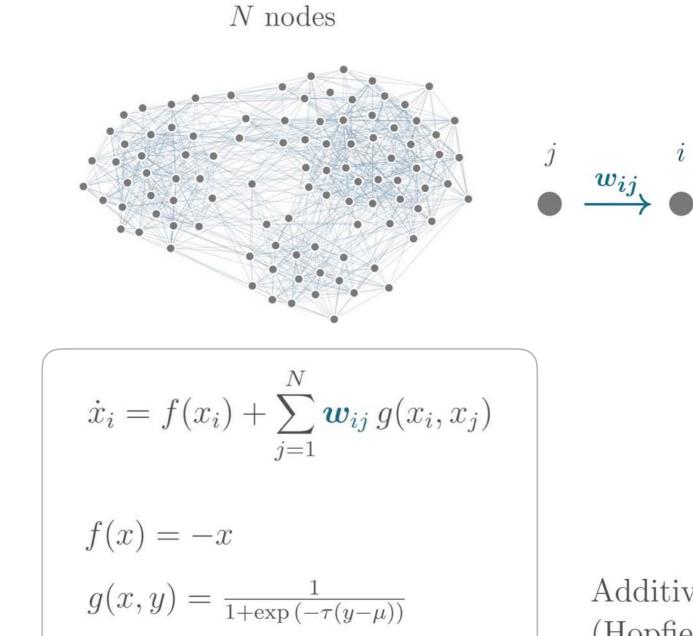


Dynamics

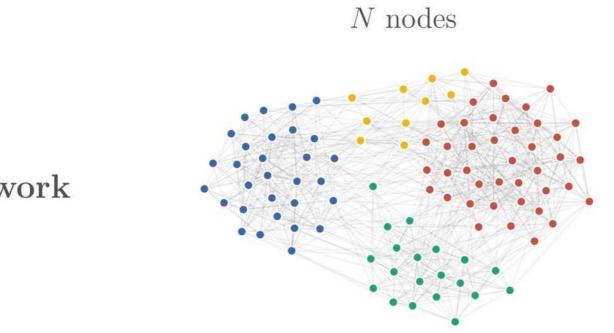
$$\dot{x}_i = f(x_i) + \sum_{j=1}^N \boldsymbol{w}_{ij} g(x_i, x_j)$$

Network

Dynamics



Additive model (Hopfield, PNAS, 1984)



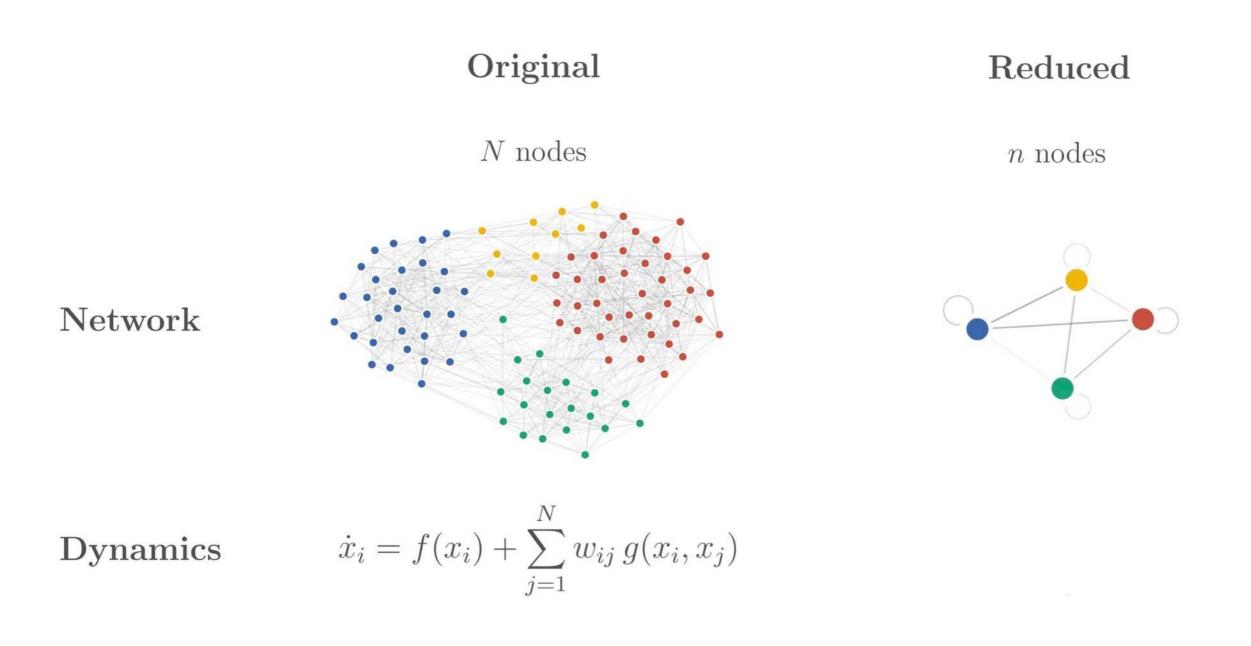
Network

Dynamics

$$\dot{x}_i = f(x_i) + \sum_{j=1}^N w_{ij} g(x_i, x_j)$$

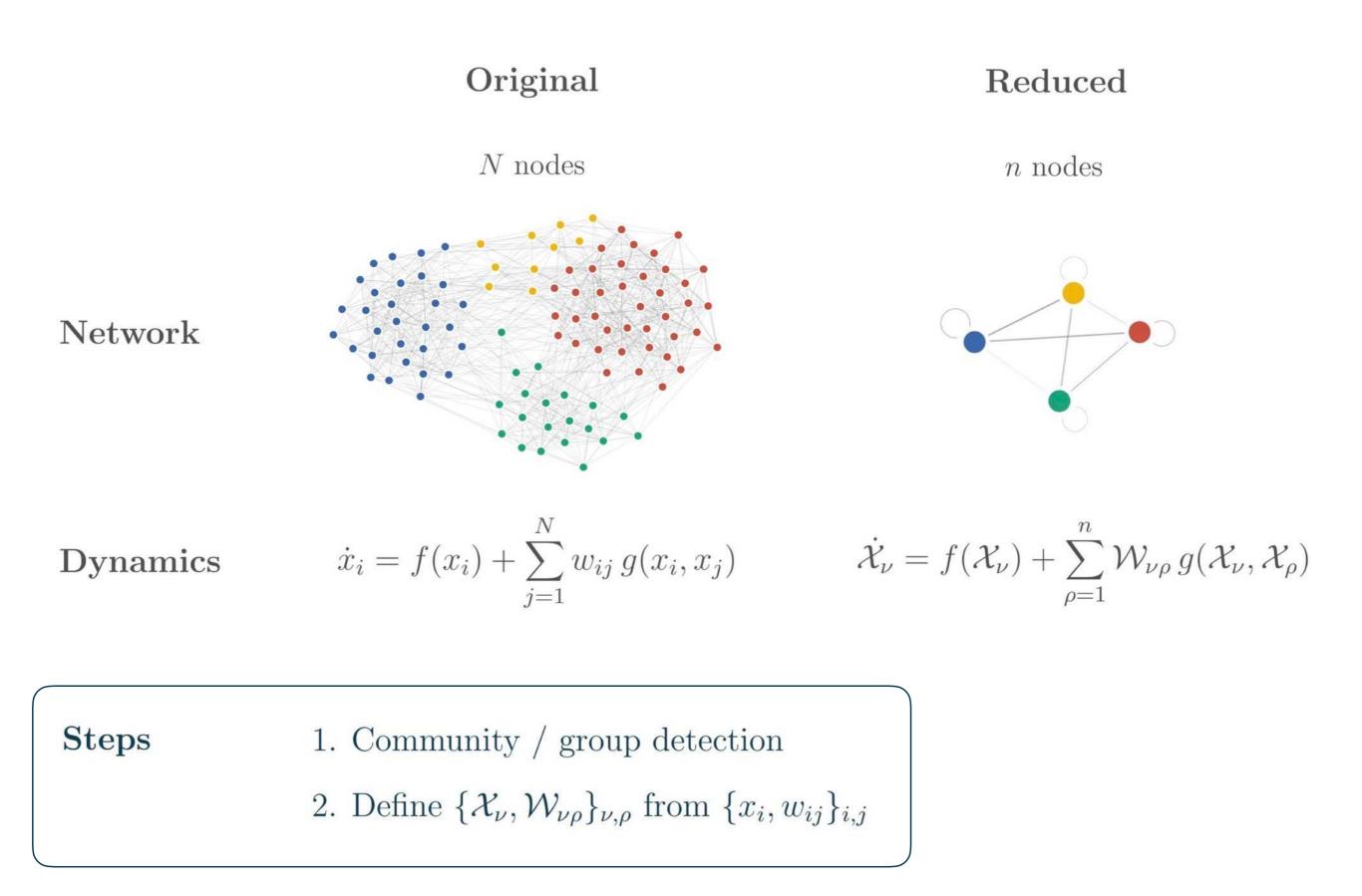
Steps

1. Community / group detection



Steps

1. Community / group detection



$$\mathcal{X}_{\nu} = \sum_{i=1}^{N} [\boldsymbol{a}_{\nu}]_{i} x_{i}, \quad [\boldsymbol{a}_{\nu}]_{i} = 0 \text{ if } i \notin G_{\nu}, \qquad \sum_{i=1}^{N} [\boldsymbol{a}_{\nu}]_{i} = 1$$

$$\mathcal{X}_{\nu} = \sum_{i=1}^{N} [\boldsymbol{a}_{\nu}]_{i} x_{i}, \quad [\boldsymbol{a}_{\nu}]_{i} = 0 \text{ if } i \notin G_{\nu}, \qquad \sum_{i=1}^{N} [\boldsymbol{a}_{\nu}]_{i} = 1$$

Exact observable dynamics

$$\dot{\mathcal{X}}_{\nu} = \sum_{i=1}^{N} [\boldsymbol{a}_{\nu}]_{i} f(x_{i}) + \sum_{i,j=1}^{N} [\boldsymbol{a}_{\nu}]_{i} w_{ij} g(x_{i}, x_{j})$$

$$\mathcal{X}_{\nu} = \sum_{i=1}^{N} [\boldsymbol{a}_{\nu}]_{i} x_{i}, \quad [\boldsymbol{a}_{\nu}]_{i} = 0 \text{ if } i \notin G_{\nu}, \qquad \sum_{i=1}^{N} [\boldsymbol{a}_{\nu}]_{i} = 1$$

Exact observable dynamics

$$\dot{\mathcal{X}}_{\nu} = \sum_{i=1}^{N} [\boldsymbol{a}_{\nu}]_{i} f(x_{i}) + \sum_{i,j=1}^{N} [\boldsymbol{a}_{\nu}]_{i} w_{ij} g(x_{i}, x_{j})$$

Assume that the activity of each node

2. is *close enough* to the corresponding observable

 $x_i \approx \mathcal{X}_{\nu}$ for $i \in G_{\nu}$

$$\mathcal{X}_{\nu} = \sum_{i=1}^{N} [\boldsymbol{a}_{\nu}]_{i} x_{i}, \quad [\boldsymbol{a}_{\nu}]_{i} = 0 \text{ if } i \notin G_{\nu}, \qquad \sum_{i=1}^{N} [\boldsymbol{a}_{\nu}]_{i} = 1$$

$$\dot{\mathcal{X}}_{\nu} = \sum_{i=1}^{N} [\boldsymbol{a}_{\nu}]_{i} f(x_{i}) + \sum_{i,j=1}^{N} [\boldsymbol{a}_{\nu}]_{i} w_{ij} g(x_{i}, x_{j})$$

Assume that the activity of each node

2. is *close enough* to the corresponding observable

 $x_i \approx \mathcal{X}_{\nu}$ for $i \in G_{\nu}$

3. For $i \in G_{\nu}, j \in G_{\rho}$, approximate

a) $f(x_i) \approx f(\mathcal{X}_{\nu}), g(x_i, x_j) \approx g(\mathcal{X}_{\nu}, \mathcal{X}_{\rho})$

The observable dynamics becomes closed without imposing any additional condition on $\{a_{\nu}\}_{\nu}$

$$\mathcal{X}_{\nu} = \sum_{i=1}^{N} [\boldsymbol{a}_{\nu}]_{i} x_{i}, \quad [\boldsymbol{a}_{\nu}]_{i} = 0 \text{ if } i \notin G_{\nu}, \qquad \sum_{i=1}^{N} [\boldsymbol{a}_{\nu}]_{i} = 1$$

$$\dot{\mathcal{X}}_{\nu} = \sum_{i=1}^{N} [\boldsymbol{a}_{\nu}]_{i} f(x_{i}) + \sum_{i,j=1}^{N} [\boldsymbol{a}_{\nu}]_{i} w_{ij} g(x_{i}, x_{j})$$

Assume that the activity of each node

2. is *close enough* to the corresponding observable

 $x_i \approx \mathcal{X}_{\nu}$ for $i \in G_{\nu}$

3. For $i \in G_{\nu}, j \in G_{\rho}$, approximate

a) $f(x_i) \approx f(\mathcal{X}_{\nu}), g(x_i, x_j) \approx g(\mathcal{X}_{\nu}, \mathcal{X}_{\rho})$

b) $f(x_i), g(x_i, x_j)$ by 1st-order Taylor polynomials around $\mathcal{X}_{\nu}, (\mathcal{X}_{\nu}, \mathcal{X}_{\rho})$

The observable dynamics becomes closed without imposing any additional condition on $\{a_{\nu}\}_{\nu}$

Some conditions have to be imposed on $\{a_{\nu}\}_{\nu}$ to close the observable dynamics

b) Some conditions have to be imposed on $\{a_{\nu}\}_{\nu}$ to close the observable dynamics

b) Some conditions have to be imposed on $\{a_{\nu}\}_{\nu}$ to close the observable dynamics

$$\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{\nu}} = (0, \cdots, 0, \overbrace{\ast, \cdots, \ast}^{\widehat{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{\nu}}}, 0, \cdots, 0)^T$$

 $W_{\nu\rho}$ Interaction matrix from nodes in G_{ρ} to nodes in G_{ν} $oldsymbol{K}_{
u
ho}$

Diagonal in-degree matrix of nodes in G_{ν} for interactions coming from G_{ρ}

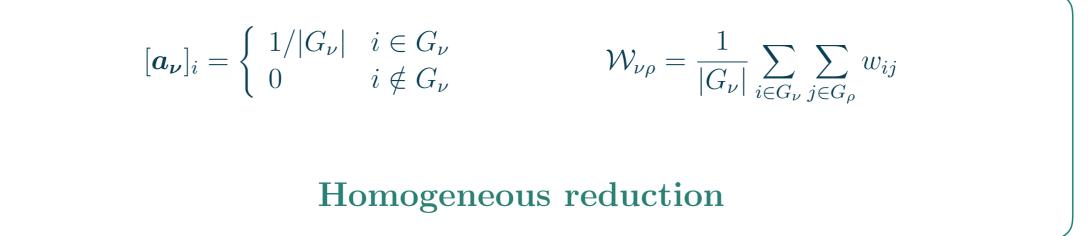
b) Some conditions have to be imposed on $\{a_{\nu}\}_{\nu}$ to close the observable dynamics

$$W^T_{
u
ho}\widehat{a}_
u = \mathcal{W}_{
u
ho}\widehat{a}_
ho \qquad \qquad K_{
u
ho}\widehat{a}_
u = \mathcal{W}_{
u
ho}\widehat{a}_
u$$

$$\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{\nu}} = (0, \cdots, 0, \overbrace{\ast, \cdots, \ast}^{\widehat{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{\nu}}}, 0, \cdots, 0)^T$$

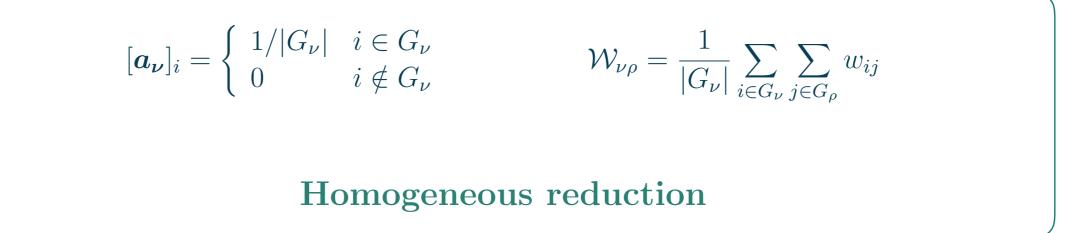
 $W_{\nu\rho}$ Interaction matrix from nodes in G_{ρ} to nodes in G_{ν} $oldsymbol{K}_{
u
ho}$

Diagonal in-degree matrix of nodes in G_{ν} for interactions coming from G_{ρ}



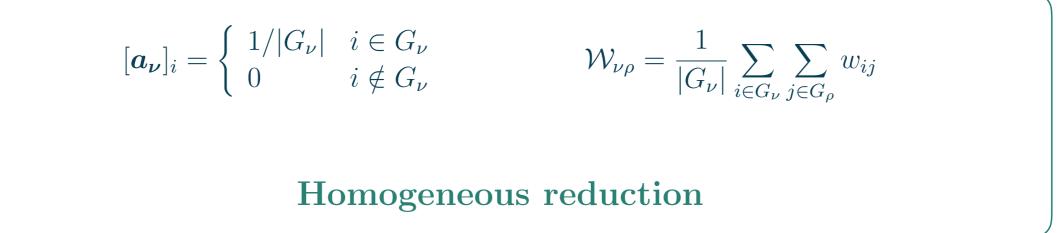
b) Some conditions have to be imposed on $\{a_{\nu}\}_{\nu}$ to close the observable dynamics

$$W^T_{
u
ho} \widehat{a}_
u = \mathcal{W}_{
u
ho} \widehat{a}_
\rho \qquad \qquad K_{
u
ho} \widehat{a}_
u = \mathcal{W}_{
u
ho} \widehat{a}_
u \qquad \qquad ext{Compatibility equations}$$



b) Some conditions have to be imposed on $\{a_{\nu}\}_{\nu}$ to close the observable dynamics

$$W^T_{
u
ho} \widehat{a}_
u = \mathcal{W}_{
u
ho} \widehat{a}_
u = \mathcal{W}_{
u
ho} \widehat{a}_
u$$
 Compatibility equations
Spectral reduction

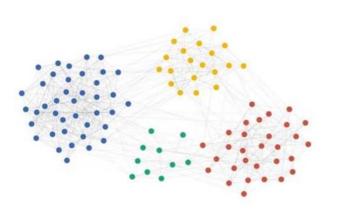


b) Some conditions have to be imposed on $\{a_{\nu}\}_{\nu}$ to close the observable dynamics

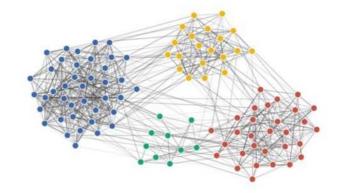
$$W^T_{
u
ho} \widehat{a}_
u = \mathcal{W}_{
u
ho} \widehat{a}_
u = \mathcal{W}_{
u
ho} \widehat{a}_
u$$
 Compatibility equations
Spectral reduction

$$\dot{\mathcal{X}}_{\nu} = f(\mathcal{X}_{\nu}) + \sum_{\rho=1}^{n} \mathcal{W}_{\nu\rho} g(\mathcal{X}_{\nu}, \mathcal{X}_{\rho})$$

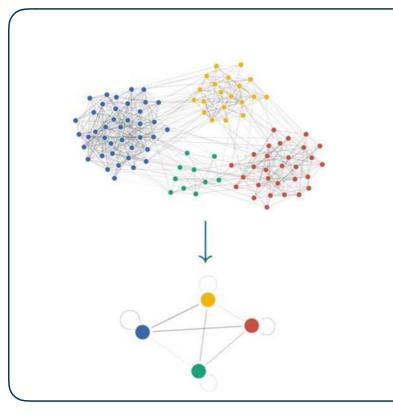
Approximate reduced dynamics









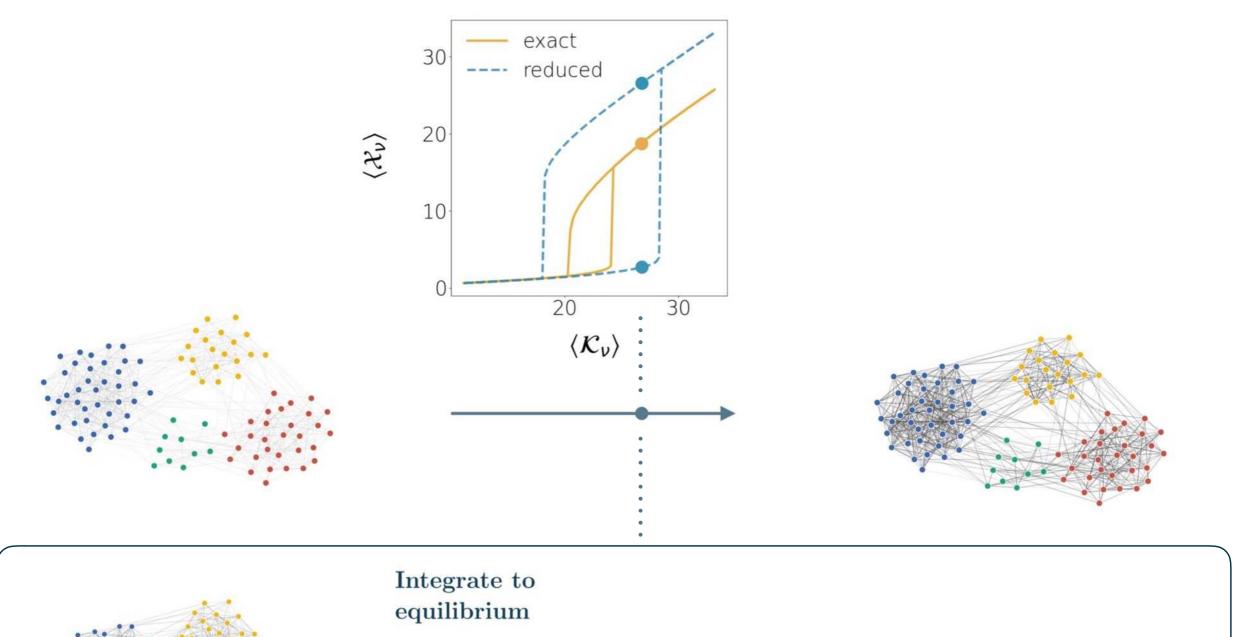


Integrate to equilibrium

 $\{\mathcal{X}_{\nu}^*\}_{\nu=1}^n$

 $\{x_i^*\}_{i=1}^N \longrightarrow \{\mathcal{X}_{\nu}^*\}_{\nu=1}^n$ exact observables

approximate observables

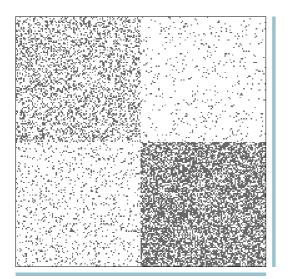


 $\{\mathcal{X}_{\nu}^*\}_{\nu=1}^n$

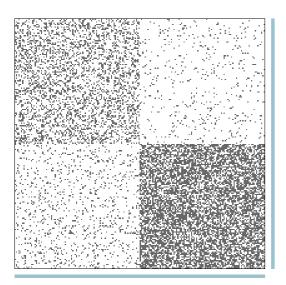
$\{x_i^*\}_{i=1}^N \longrightarrow \{\mathcal{X}_{\nu}^*\}_{\nu=1}^n$ exact observables

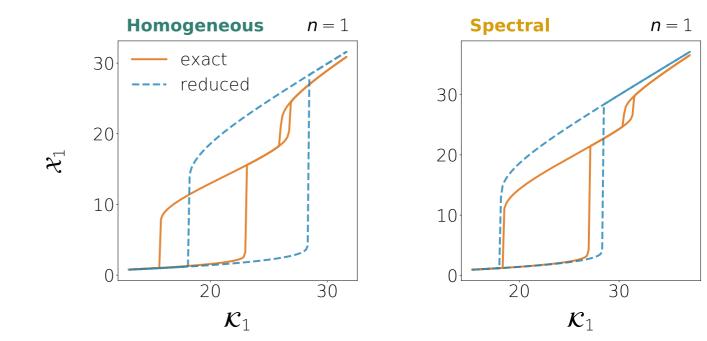
approximate observables

$$N = 200$$

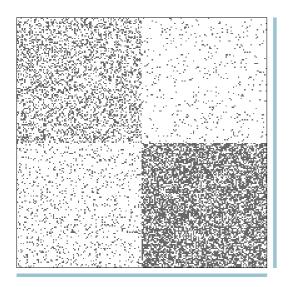


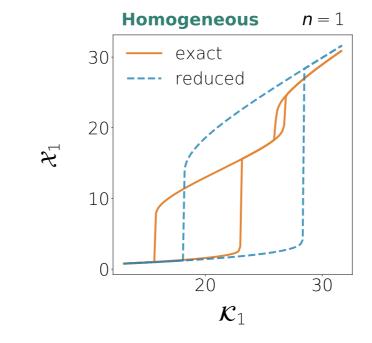
$$N = 200$$

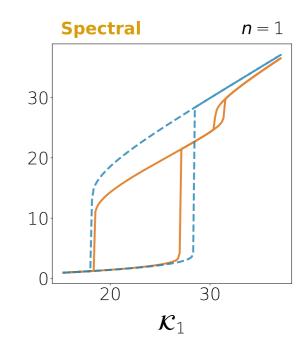


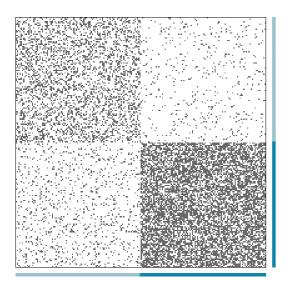


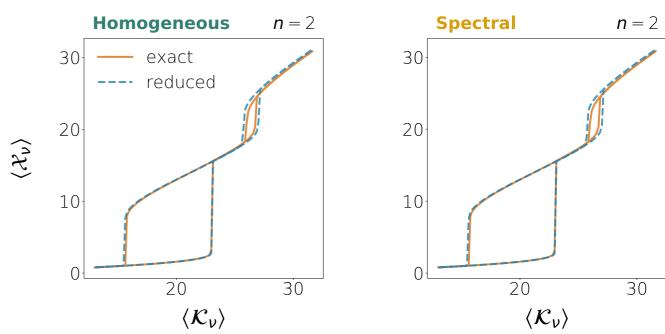
$$N = 200$$







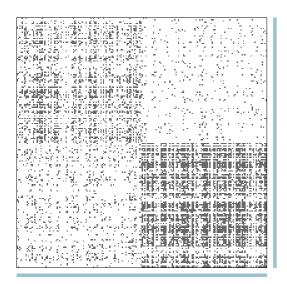


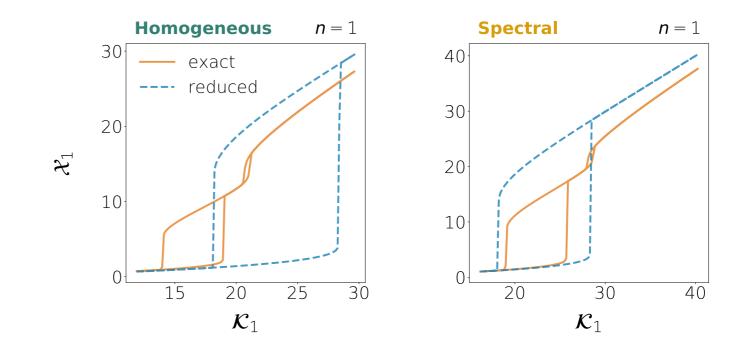


$$N = 200$$

(a) FF77 (a) (#10 (7.72) (CO) (FFF6) (a) (a) (b) (a) (b) (b) (b) (b) (b) (b) (b) (b) (b) (b
- 网络哈哈尔 化双原油 预算 法通知法 建氯化 医子宫 计分析 计分子 计分子 计分子 化分子子
이 것 같은 것 같은 문화적인 것을 것 같은 것 같은 것 같은 것 같이 있는 것 같아요. 가지 않는 것 같이 있는 것 같아요. 이 가지 않는 것 같이 있는 것 같아요. 이 가지 않는 것 이 가지 않는 것 같아요. 이 가지 않는 것 않는
- [CARSER] (1922) - 田田田 (2017) CARSER (2017) - CARSER - CARSER (2017) - CARSER (2017)
[1] An and the second statements of the second s Second second s Second second se
이 방법 방법에서는 이 것 이 방법이 많은 것 같은 것 같은 것 이 가지 않는 것 같이 있는 것 같은 것 같이 있는 것 같이 없다.
- 國際會會局會員的 승규는 法律 (書牌) 유명한 운영은 전에 가지 않는 것이 하는 것이 하는 것이 가지 않는 것이 하는 것이 이 하는 것이 이 하는 것이 하는
이 이 이 것 같아요. 이 것 것 같아? 이 것 것 같아요. 이 가 있는 것 것 같아요. 이 것 같아요.
지수가 가장 못하는 것 같은 것 같은 것 같은 것 이 방법이 있는 것 같은 것 같은 것 같은 것 같은 것 같은 것 같이 있는 것 같이 있다.
- 柳谷 小田崎 御殿台 からえ (山) 小橋 (長大家) りょう アイ・ドライト ボインド・ション・パイト
- 他表示你的复数,是你们们们们就知道你,是你们,你不是你,你不是你不是你?"
[1] Souther and A. Diversition and A. 2018. A 2018. A state of the
计目前控制图书 建丁烯酸 化硫酸盐酸盐 化硫酸盐 化二乙基苯乙基 化乙基苯乙基 化乙基乙基
- [1] 동양 영양 영양 성능과동을 이번 속한 영양의 그가 다 가지 않는 것이다. 그는 것이 가지 않는 것이다.
- For an information of the product of the second state of the
- [19일: 영화·영화·영화·영화·영화·영화·영화·영화·영화·영화·영화·영화·영화·영
[2013] S. BERK, M. M. MARK, D. BERK, D. B. SAMMAR, 200 (1996).
· [1992] 2월2일 전 11월 20일 2일
이상경 바람이 유가지 않는 것 같아요. 이상 가지 않는 것 같아요. 이상 가지 않는 것이 가지 않는 것이 같아. 나는 것이 나는 것이 나는 것이 같아.
计算机编辑机构 化氨基苯基氨基基基苯基氨基 化乙基乙烯二乙基乙烯二乙基乙烯二乙基乙烯
이 사람이 전 것 같아요. 이 지난 것 같아요. 한 것 같은 것 같은 것 같은 것 같은 것 같이 있는 것 같이 없는 것 같이 않는 것 같이 없는 것 같이 없는 것 같이 않는 것 같이 않는 것 같이 없는 것 같이 않는 것 않는 것 같이 않이 않이 않이 않이 않는 것 않이 않이 않는 것 않이 않는 것 않이 않
and the second
· 人名格伦尔 医外外 后,这个人,这一一次后后,这个个人,你没有你要不能是我们是我们是我们的是我们的是我们的是我们。"
- "你这么你怎么?"你说道:"你你不会吗?"你你 <u>你说道。"唐代语言我说道:"你</u> 是我们的话题,我们
- 「「「「」」」「「」」」」「「」」」「「「」」」「「」」」「「」」」」「「」」」」
n an an an an an an ann an an an ann an
- 1、A. 2、1、2、24(1)2(2)3(1)2(2)2(2)2)2(2)2)2(2)2(2)2)2(2)2(2)2)2(2)2(2)2)2(2)2(2)2)
- 19、22-27 A. 27 网络 - 222 A. 27 A. 27 A. 20 网络海峡海峡 网络加尔斯 - 2023 A. 28 A. 28 A. 29 A. 2023 A. 2023 A. 2023 A. 20
· [14] 22 [24] 22 [24] 22 [24] 22 [24] 22 [24] 22 [25
【《新史》和《《《《》》 法非规则地理规则的推进利用
n han an a
· 1、25.4.2 (19.5)。(19.4)。(19.5)。 [19.5]。 [19.6]。 [19.6]。 [19.6]。 [19.6]。 [19.6]。 [19.6]。 [19.6]。 [19.6]。 [19.6]
- 「たくことになった」になったとうで多な制作用は経営には美国の装置の規則」
· [6] - 21월 - 21일 - 21월 - 21일 - 21
n ha a bha an

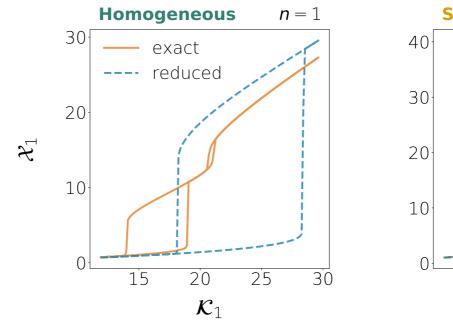
$$N = 200$$

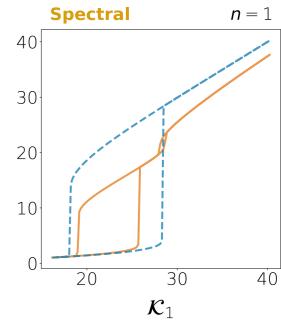




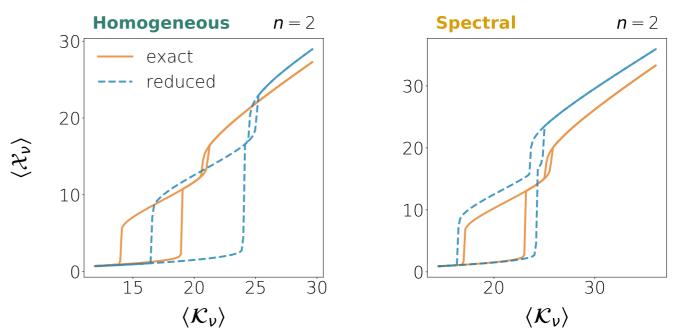
$$N = 200$$

(a) a case of the case of the case of the case of the first of the
법률 방금 수 있지? 법원 김 법정 영양 방법 방법 위험 가슴이 가지만 가슴 가슴 가슴 가슴 가슴.
MENERAL 이 EXECTEMENT MEREN 2014 이 전 2014 - 1917 - 2017 - 2017 - 2017 - 2017 - 2017 - 2017 - 2017 - 2017 - 2017
[19:8:36년] (2:12일~ 2:12) (2:3:2:3:2:12) (2:3:2:3:12) (2:3:2:3:2:12) (2:3:2:3:12)
[学校 문学)은 특히 이 전 가격 옷이 많은 것 같아요. 것이 나는 것이 가지 않는 것 같아요. 이 것 같아.
「必要」「「「「」」、「「」、「」、「」、「」、「」、「」、「」、「」、「」、「」、「
(수영향품) 2007년 110명 원(1917년 - 이번 전 1817년 - 1817년 - 1817년 18
局警察器器 机运行器 计算法算法算法算法 法人名法 人名法 人名法尔尔 化分子子 化分子子
i 1997 yang beraki sebelah sebelah sebelah sebelah peraku karang berakan karang berakan karang berakan sebelah Peraku sebelah berakan sebelah peraku karang berakan berakan sebelah sebelah sebelah sebelah sebelah sebelah se
Construction of the second
동안 상태의 승규는 것은 것을 알려야 한 것을 가지 않는 것이 있는 것이 없는 것이 없다.
방법적(방법) 인정) 전하지만 않는 것 같아요. 이는 것 같아요. 이는 것
1997年1月19月1日(1997年19月1日)(1997年19月)(1997年1月)(1997年1月)(1997年1月)) 1999年1月19月1日(1997年1月1日)(1997年1月)(1997年1月)(1997年1月)(1997年1月)) 1997年1月19日(1997年1月)(1997年1月)(1997年1月)(1997年1月)(1997年1月)(1997年1月))(1997年1月)(1997年1月)(1997年1月))(1997年1月))(1997年1月
n de la fait de la companya de la construcción de la companya de la companya de la companya de la companya de En esta de la companya de la company
- 사업 사업 사업 사업 사업 사업 가격 이 가격이 있는 것 같은 것 같은 것을 하는 것을 하는 것 같이 가지 않는 것을 것을 했다.
이 가슴이 가지 않는 것이 가지 않는 것이 가지 않는 것이 해외에서 이 가지 않는 것이 가지 않는 것이 있다. 이 가슴이 가지 않는 것이 가지 않는 것이 가지 않는 것이 가지 않는 것이 있는 것이 같이 있다. 이 가지 않는 것이 같이 있는 것이 같이 있는 것이 있는 것이 있는 것이 있는 것이 있는 것이 있는 가
이 가지 않는 것 같은 것 같은 것 같은 것 같은 것 같은 것 같은 것을 잘 들었다. 승규는 것 같은 것 같
(a) Second Se Second Second S Second Second Seco
2월 2월 26일 2월 20일 2월
「 A M 」 > A M A M A M A M A M A M A M A M A M A
이는 것은
- 決入についていた。 - 小学 博見県教育部員 読載表述 原料
计专行 化化化合物 医外侧的 化化化合物 网络阿拉斯 网络阿拉斯斯阿拉斯斯加拉斯斯
가 있는 것은 것이 있는 것 같은 것이 있는 것
ka ng Langang ng mengenggi kang kang kang sebagai kang di pertahan kang bertakan sebagai kang bertakan sebagai Kang tahun kang bertakan pertahan kang bertakan kang bertakan kang bertakan kang bertakan sebagai kang bertakan
가 있는 것을 하는 것을 하는 것을 하는 것을 하는 것을 하는 것을 수 있는 것을 가지 않는 것을 가지 않는 것을 수 있는 것을 수 있는 것을 수 있는 것을 수 있다. 것을 하는 것을 하는 것을 하는 이들은 것을 하는 것을 수 있는 것을 수 있는 것을 하는 것을 수 있는 것을 수 있는 같은 것을 수 있는 것을 수 있

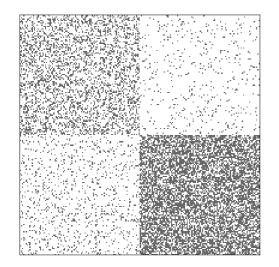


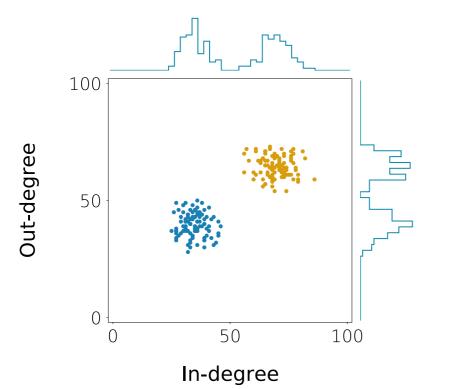


计输入输入器 经资源保证 经保证的 法保证 医子宫 计分子 计分子 化二乙二乙二乙二乙二乙二乙二乙二乙二乙二乙二乙二乙二乙二乙二乙二乙二乙二乙二乙
이 사실 방법에 있는 것은 것을 가지 않는 것을 수 있는 것을 수 있는 것을 가지 않는 것을 수 있는 것을 가지 않는 것을 수 있는 것을 수 있는 것을
이 200 방법(2014년 2014년 2017년 2014년 2014
计结合 网络印度马克 化离离 保护的复数 经保护的公司 计正式公司 计正式公司 经公司 计算机 计算机
이 것 같은 것같다. 물건 가지 않게 좋아 있었다. 이상, 가지 않는 것이 있다. 이상 바라 나는 네.
[15] A. S. M. M. L. M. K.
[성영영양 <u>특별한 동생</u> 전쟁 전쟁 등 전쟁 등 전 등 전 등 전 등 전 등 등 전 등 이 등 등 전 등 이 등 등 전 등 전
· 相對於何時目離一、時間、後期目前的時間發展。
- [2] 동생양님께? 이 방송비용은 이번 영광에 있는 것 같아요. 그는 것 같아요. 그는 것 같아요. 그는 것 같아요.
In State Hearing Section 2018 (1997) State St
[法約合理]강소 전 환자(語): 한 동안(함): 2월 - 2월
19時間には最近な新聞には「「「「「「「」」」「「」」」「「」」」
1879年時時候,1987年時间後後後後後,1913年(1915年)。 1987年時時候,1989年時時時時時時
1986년 1월 2017년 2월 2017년 2월 2017년 1월 2017년 2월 2
 A state of the sta
a han a sha a shekara a shekar
n an the first of
- 1995年1月1日,1995年1月1日,1995年1月1日日日(1995年1日)。 (1995年1日)) - 1995年1日) - 1995
1. 你们还没有了,你说了,你们的你们,你们们都能够是我的你们,我们们就能能做你们的事情。"
(4) (1) (2) (3) (4) (4) (4) (4) (4) (4) (5) (5) (5) (5) (5) (5) (5) (5) (5) (5
. Na sa kita kata ya 1999 a wakaza kuta kuta kita kuta kata kata kata kuta kuta kuta kata kuta ku
- 2012년 전 2011년 2012년
1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1
나는 것은 이상에 있는 것 같은 것 같아요. 이상에 있는 것 같아요. 이상에 가지 않는 것이 않는 것이 같아요. 이상에 있는 것이 않는 것이 같아요. 이상에 있는 것이 같아요.
计记载 化化合金 计字句 化化化合物 化化合物 网络新闻 医输出 医结束的 机械 一一
[6] X.L. Guo, J. H. H. S. Mar, K. B. Karakara, and S. Karakara, "In the second state of the second stat
[1] A. B. S. M. M. S. M. S. M. S. M. M. S. M S. M. S. M S. M. S. MS

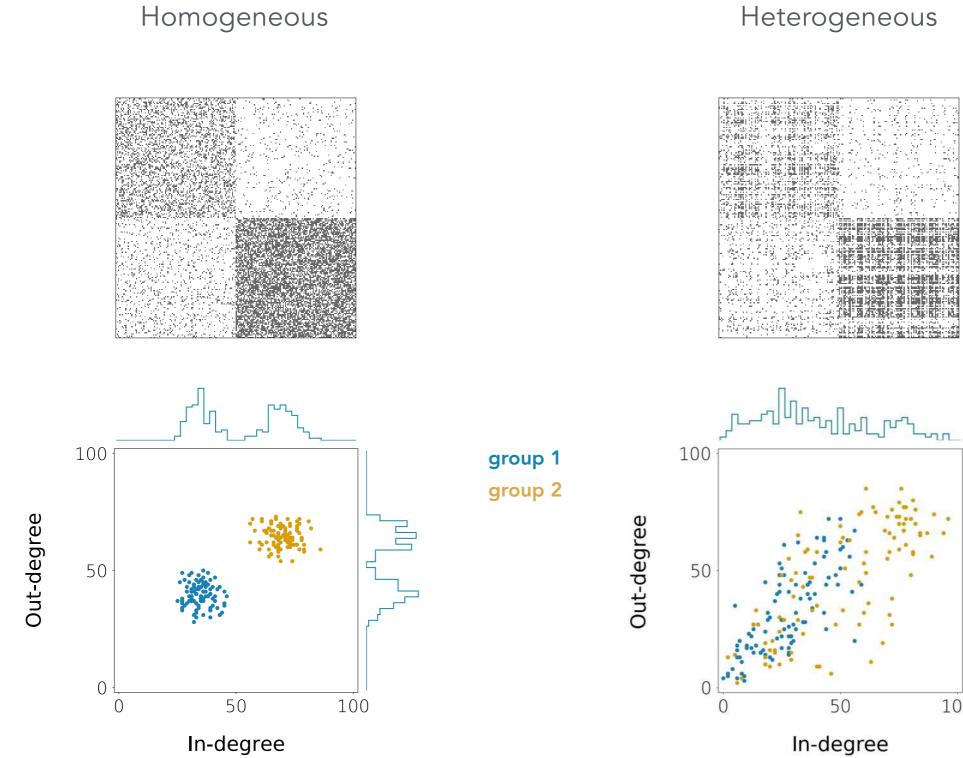


Homogeneous



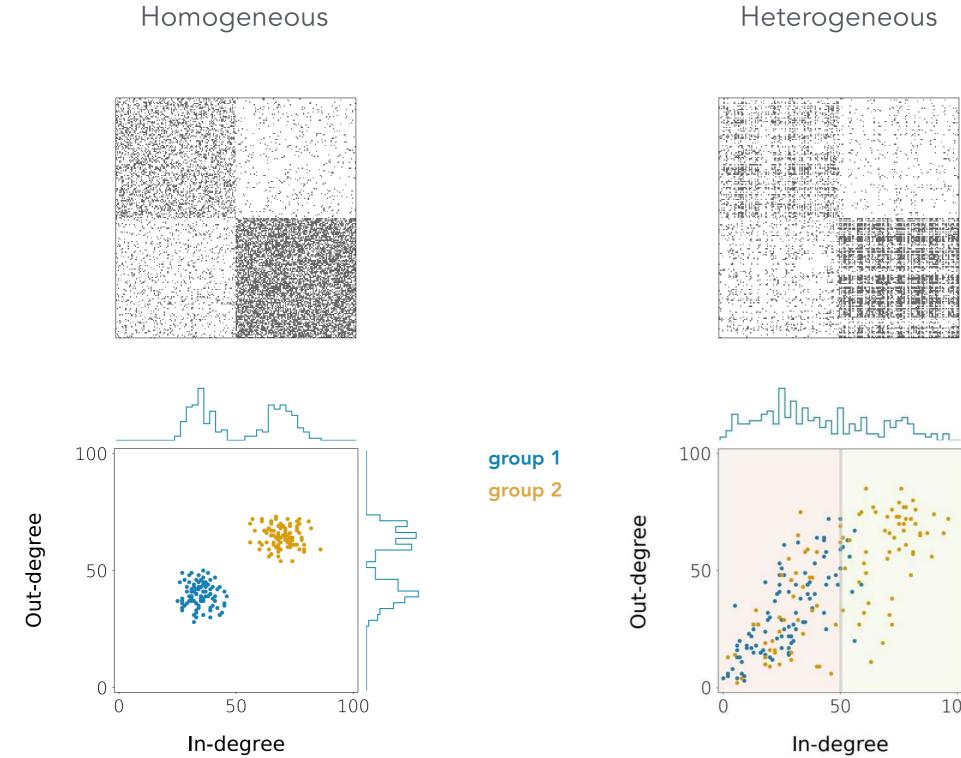


group 1 group 2



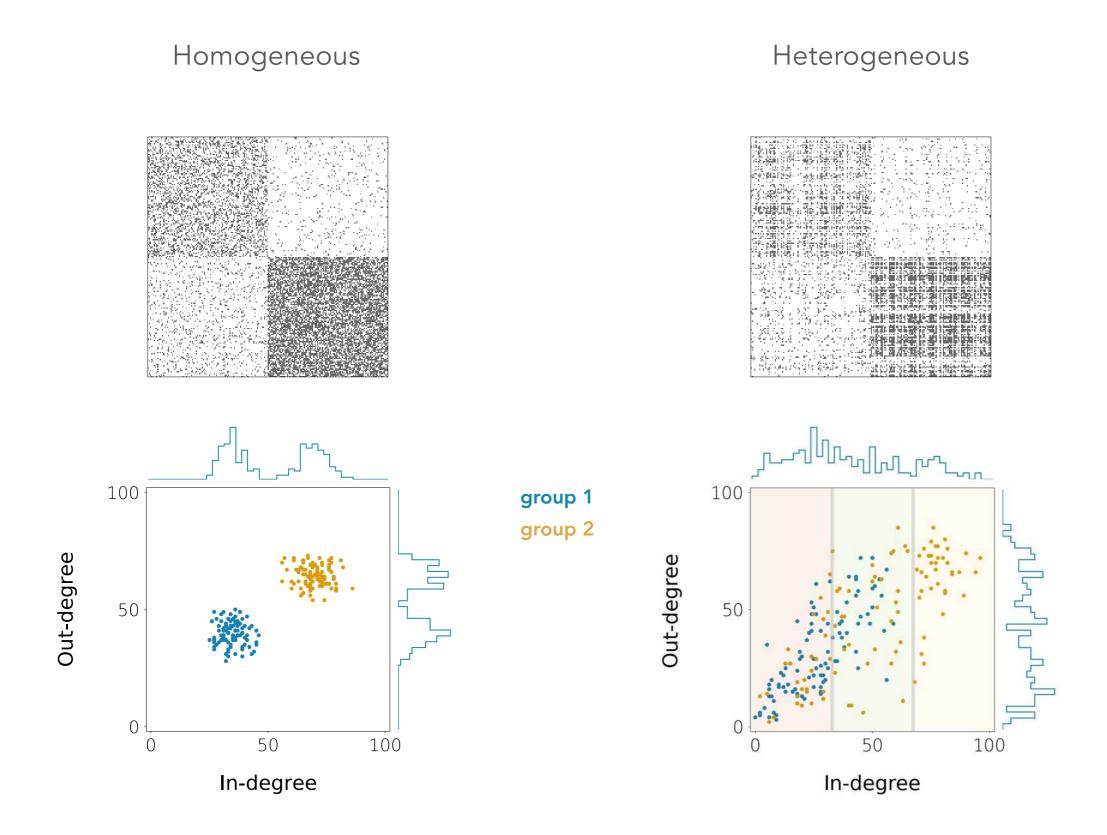
In-degree

100



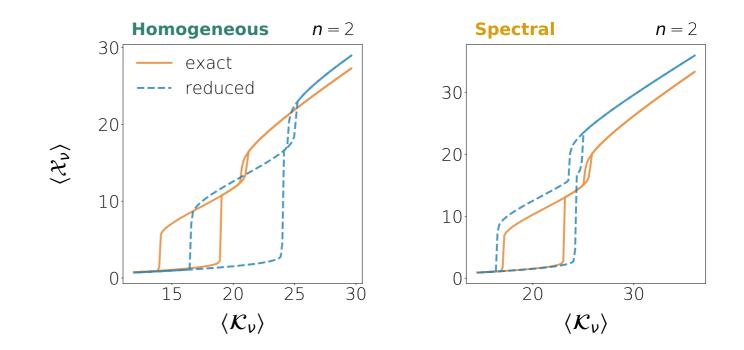
100

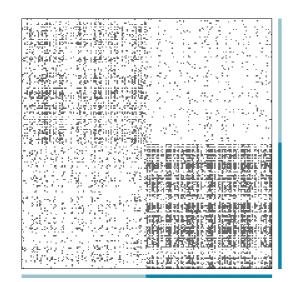
In-degree

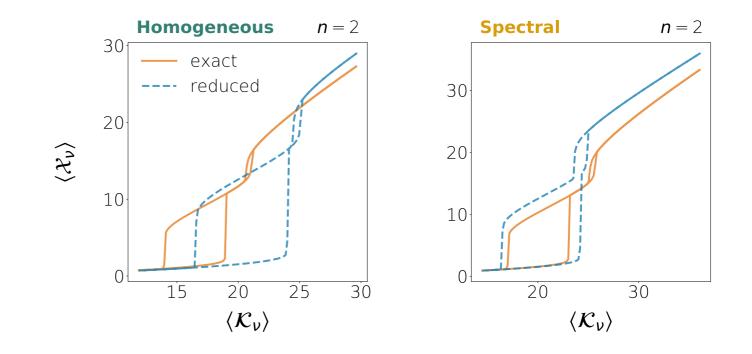


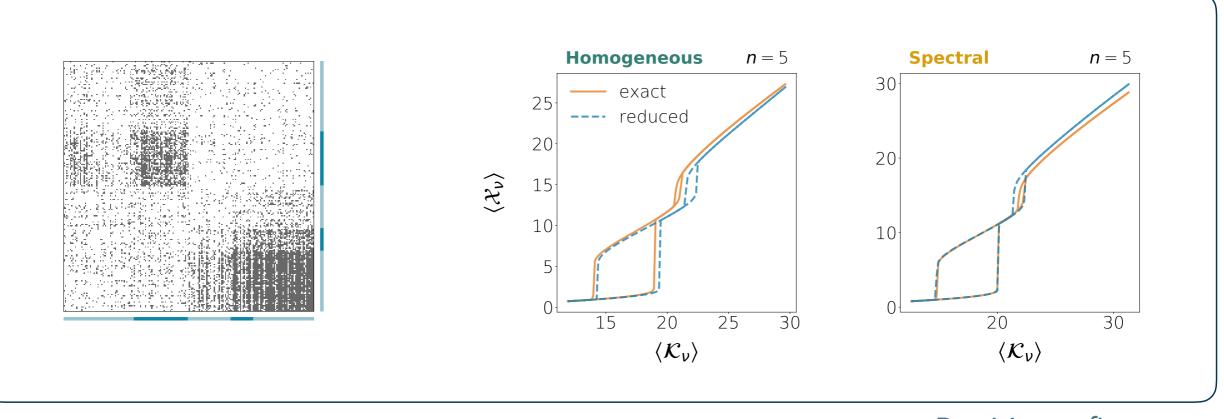
We can define more groups by partitioning the nodes within each group according to their connectivity properties

 It is a short to be a short by a sub-shift of the state o
· 사람이 가족이 있다. 전자님, 10 2017년 1월
- 情報 物理 网络拉莱希德 动物植物 网络新闻 计算法 计算法 计算法 计算法 计算法 计算法
- 「「「「「「」」」」「「」」」「「」」」「「」」」「「」」」」「」」」「」」
· 이상 전문을 얻는 사람은 사람은 것은 것은 것을 수 있는 것이 아파 가지 않는 것이 가지 않는 것이 가지 않는 것이 있다.
· [18] : 2016년 11월 - 12일 - 12일 : 2017년 2
[10] S. M. M. M. M. H. H. S. M. M. S. M.
· 网络马马斯克特伦马马斯克 法法法法律法 计通道 医白垩白 计算法 医白垩石 化二乙基乙二乙基乙二乙基乙二乙
- 化溴酸酸酸医酸物、氨酸精酶 经销售利润的公司 计分子 计分子 计分子 化二乙二乙烯基
计超级短期 化法格和特别 网络普拉姆德尔 人名美国马克 法法律法律法律
- 「「「「「「」」」」」」」」」」」」」」」」」」」」」」」」」」」」」」」
per voirse Service by industry work in the service of t
- 1997年1996年1月1日(1997年1月1日)(1997年1月)(1997年1月)(1997年1月)(1997年1月)(1997年1月)(1997年1月)(1997年1月)(1997年1月)(1997年1月)(19
- 開始寺園院装住 法法法法保险管理部队
[10] S.
- 1999년 2월 1999년 1999년 1999년 1998년 1998년 1999년 1999
计分析 化合理 医无关节 经济关注 化乙烯酸盐医乙烯酸盐酸 机物化物和物料机
- 11 - 21 - 21 - 21 - 21 - 21 - 22 - 22
计数据输出 计不可读 建一口 法法法法 经工作 网络白红花 医二乙基苯基基苯基基苯基苯基苯基苯基苯基
计标准设计 化合合合金 化合合合金 计分词数据数据数据数据数据数据数据数据数据数据数据
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
[14] (14) (14) (14) (14) (14) (14) (14) (14)
[14] (14) (14) (14) (14) (14) (14) (14) (14)

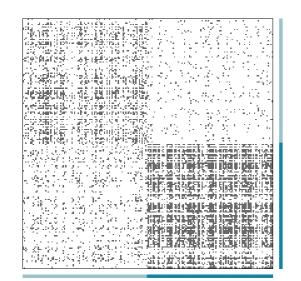


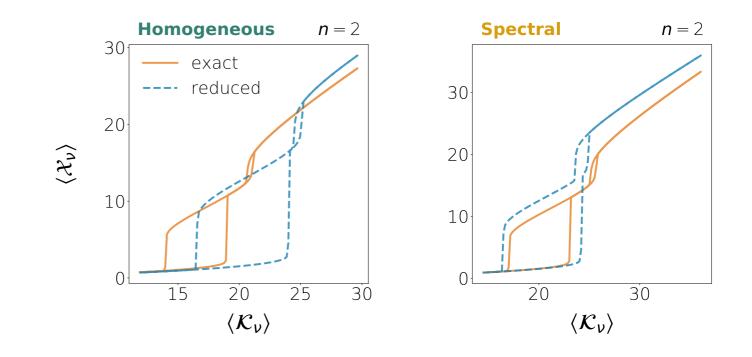


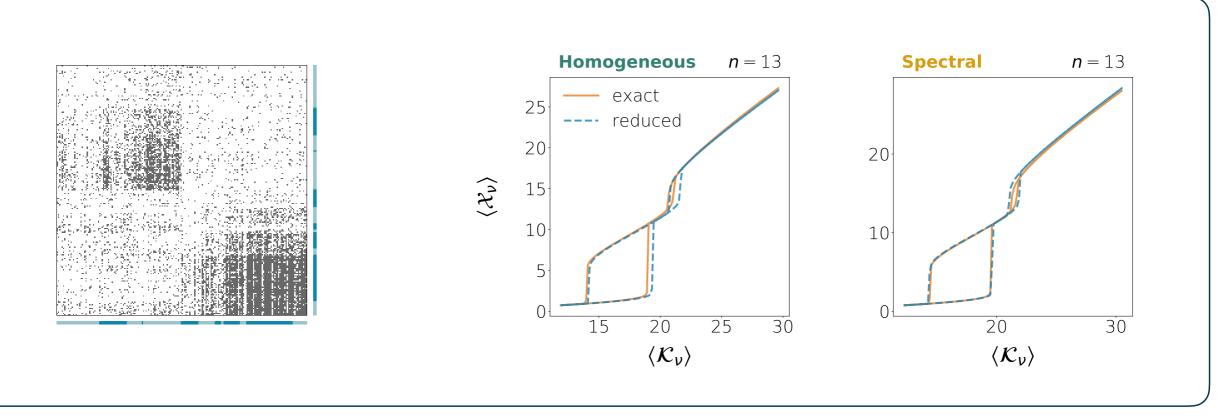




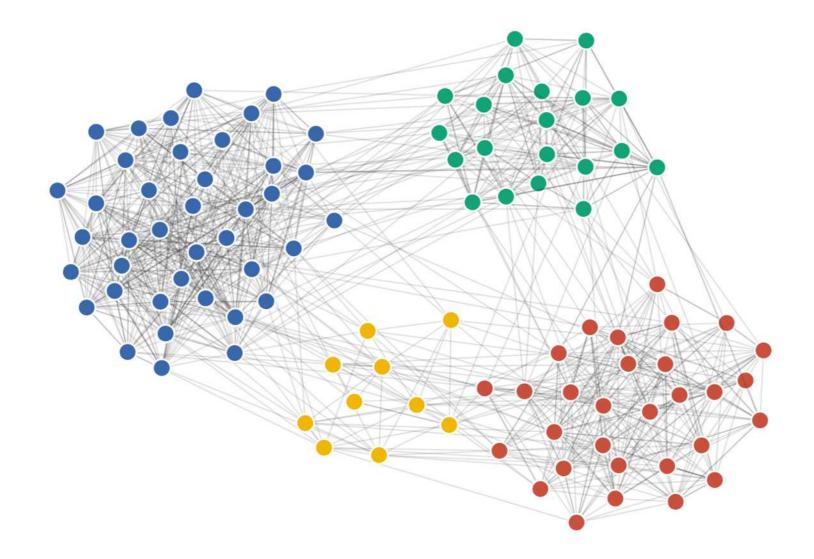
Partition refinement

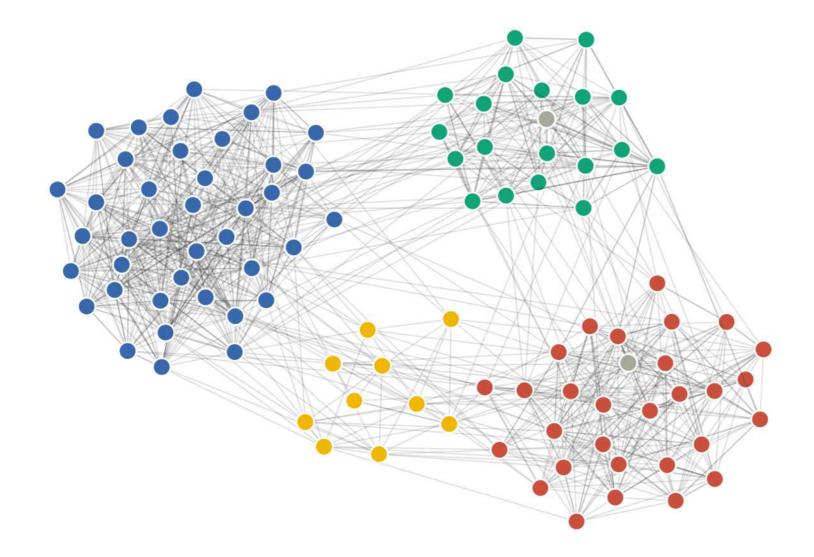


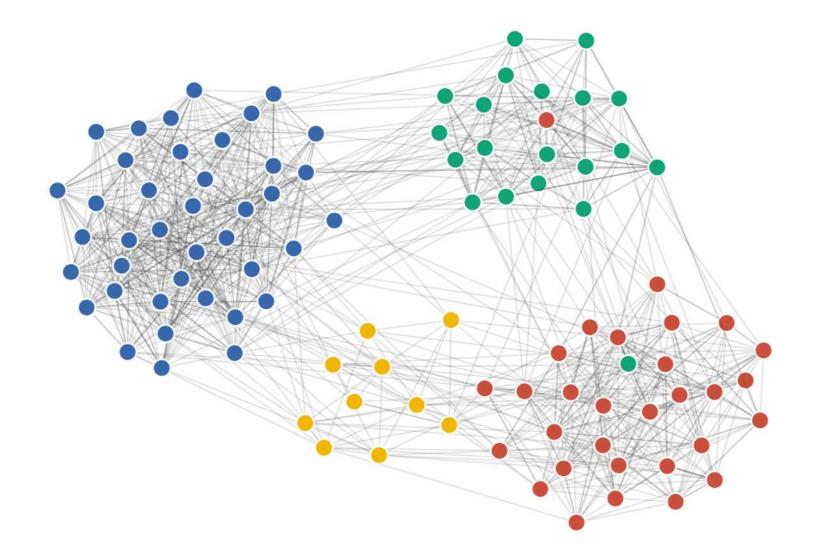


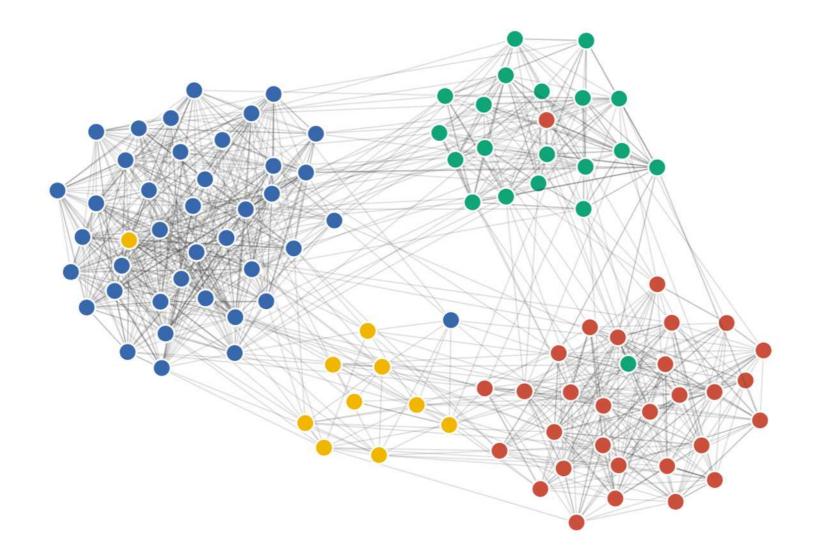


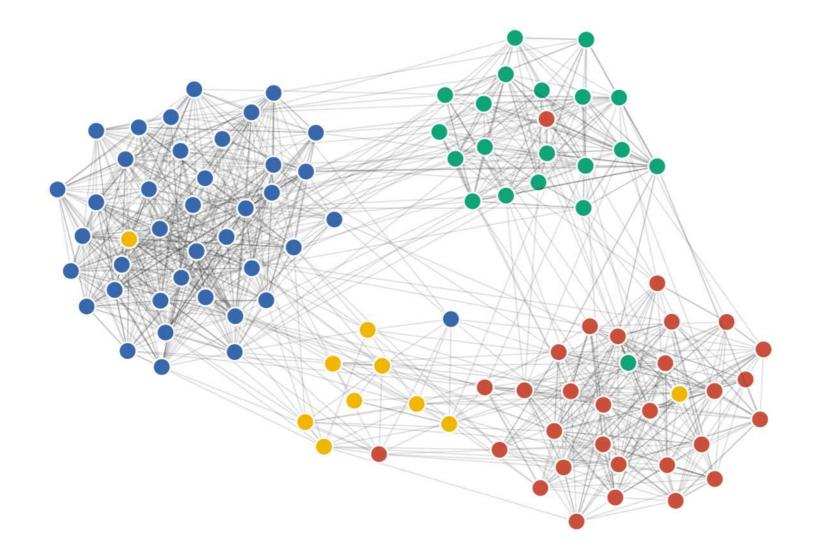
Partition refinement

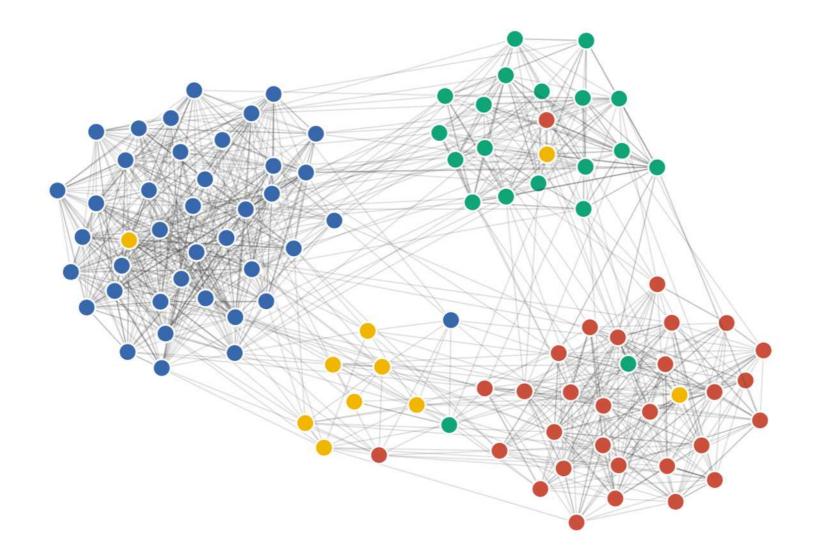


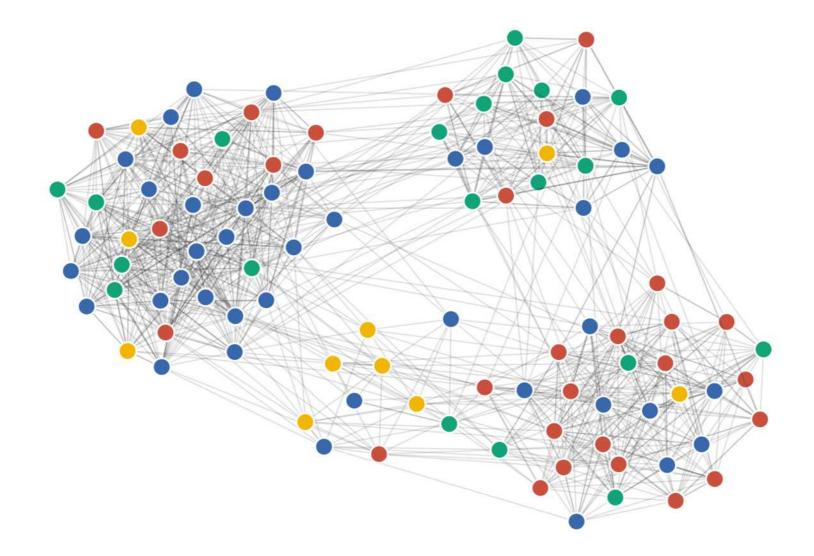






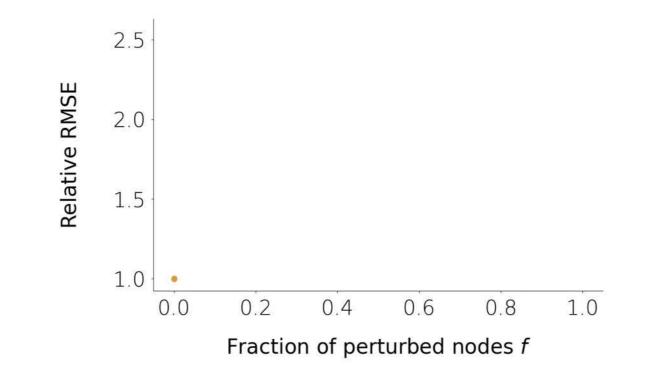






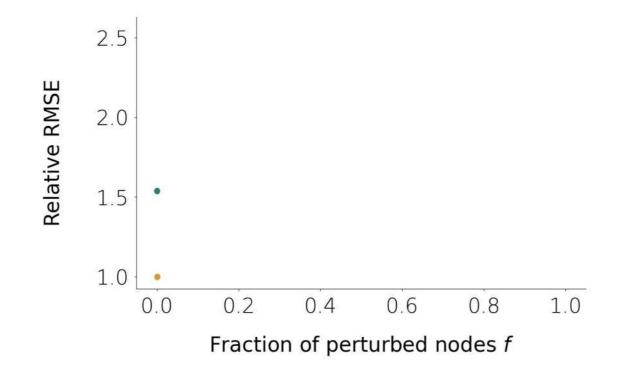
N = 200, n = 5





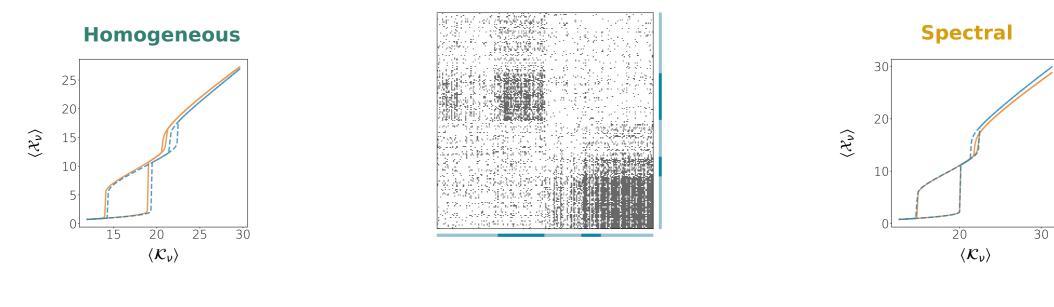
Sensitivity to partition choice

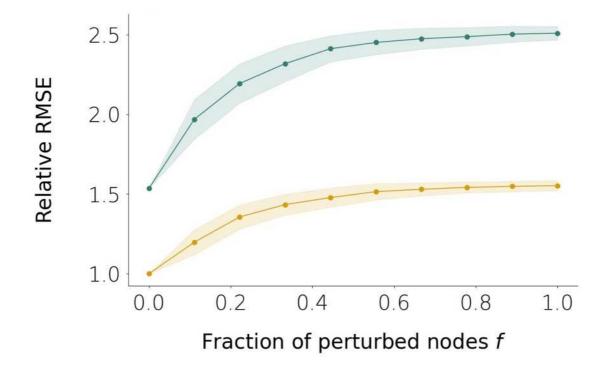
Spectral Homogeneous eredu riveraa Misterut Vetaria $\langle \mathcal{X}_{
u}
angle$ $\langle \mathcal{X}_{\nu} \rangle$ $\langle {\cal K}_{
u}
angle$ $\langle {\cal K}_{
u}
angle$



N = 200, n = 5

N = 200, n = 5





To summarize...

- Dimension reduction can be used to extract dynamical properties of complex networks such as bifurcation points
- The Spectral reduction
 - * can be applied to directed interaction matrices
 - * performs well on heterogeneous networks
 - * is robust to perturbations of node grouping